湖南省高等教育自学考试

课 程 考 试 大 纲

偏微分方程

（课程代码：**02015**）

湖南省教育考试院组编
2016 年 **12** 月

高等教育自学考试课程考试大纲

课程名称：偏微分方程　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　课程代码：02015

第一部分　课程性质与目标

一、课程性质与特点

偏微分方程是高等教育自学考试数学（本科）专业的选考课程。主要介绍偏微分方程的一些导出方法和经典解法，以及现代偏微分方程的基本概念和基本理论，在数学的其它分支和工程物理方面有着广泛的应用。

二、课程目标与基本要求

通过本课程的学习，考生应系统获得现代偏微分方程中最基本的知识和必要的理论基础，获得比较熟练的运算技巧，学会处理典型的偏微分方程的适定性问题，培养考生分析问题和解决问题的能力，为以后进一步的学习奠定基础。

三、与本专业其他课程的关系

偏微分方程是数学分析和常微分方程的后续课程，是进一步学习现代偏微分方程理论、几何分析等课程的基础。

第二部分　考核内容与考核目标

第一章　数学物理方程的导出

一、学习目的与要求

通过本章的学习，考生应掌握一般迁移方程和 Hamilton 原理，会推导典型的数学物理方程，并能针对一些简单的实际问题，建立偏微分方程模型。

二、考核知识点与考核目标

（一）Hamilton 原理与数学物理方程（重点）

识记：Hamilton 原理和极小势能原理的内容

理解：用 Hamilton 原理推导 Euler 方程的方法，会推导弦振动方程、膜振动方程等数学物理方程，并会给出具体问题对应的初始条件和边界条件（Dirchlet 边界条件、Newmann 边界条件、Robin 边界条件）

应用：用 Hamilton 原理推导较复杂的实际问题所满足的方程

（二）迁移方程导出数学物理方程（次重点）

识记：一般迁移方程的推导，掌握被迁移量、通量、源的概念

理解：用迁移方程推导热传导方程等较简单的数学物理方程，理解初始条件和边界条件的提法

应用：用迁移方程推导流体力学方程组等较复杂的实际问题所满足的方程

第二章　一些经典解法

一、学习目的与要求

通过本章的学习，考生应掌握 D’Alembert 公式的推导及简单应用，掌握分离变量法的具体过程和应用，了解 Sturm-Liouville 定理，理解特征方程、特征曲线的概念，学会用特征方法处理一阶线性和拟线性方程的 Cauchy 问题。

二、考核知识点与考核目标

（一）D’Alembert 公式与分离变量法（重点）

识记：D’Alembert 公式及其推导，了解 Sturm-Liouville 定理

理解：D’Alembert 公式求解弦振动问题，简单固有值问题的求解，重点掌握用分离变量法求解初边值问题

应用：D’Alembert 公式和分离变量法求解较复杂的偏微分方程

（二）特征方法（次重点）

识记：特征方程、特征曲线的概念

理解：特征方法求解一阶线性和拟线性方程的 Cauchy 问题

应用：特征方法在人口分布问题、交通流问题等非线性问题中的应用

第三章　偏微分方程的一般理论

一、学习目的与要求

通过本章的学习，考生应理解偏微分方程的一般概念，了解 Cauchy-Kowalewski 定理，掌握偏微分算子和偏微分方程的分类，学会用叠加原理和齐次化原理处理非齐次方程。

二、考核知识点与考核目标

（一）方程的分类、两个自变量二阶方程的简化（重点）

识记：椭圆型、双曲型、抛物型算子的概念

理解：偏微分算子和偏微分方程的类型判断方法，学会将两个自变量二阶方程化为标准形式

应用：较为复杂的偏微分算子的分类和证明

（二）偏微分方程的一般概念、叠加原理与齐次化原理（次重点）

识记：偏微分方程的阶、定解问题、适定性等概念

理解：用 Duhamel 原理将简单的非齐次方程齐次化

应用：叠加原理和齐次化原理处理复杂的非齐次方程

（三）解的存在性定理（一般）

识记：Cauchy-Kowalewski 定理的条件和结论

理解：通过 Hadamard 反例和 Levy 反例，进一步理解 Cauchy-Kowalewski 定理

应用：Cauchy-Kowalewski 定理在具体问题中的应用

第四章　椭圆型方程

一、学习目的与要求

通过本章的学习，考生应掌握广义函数的有关概念和计算，理解基本解和 Green 函数的概念，重点掌握平均值不等式、极值原理及其推论和应用，了解调和函数的基本性质。

二、考核知识点与考核目标

（一）极值原理（重点）

识记：上调和函数、下调和函数、调和函数的概念

理解：平均值不等式、极值原理及其推论的内容和证明

应用：椭圆型方程的第一边值问题的解的存在唯一性的证明

（二）基本解与 Green 函数、广义函数的概念（次重点）

识记：广义函数、广义函数的导数及支集、基本解与 Green 函数的概念；会证明 δ 函数是广义函数；

理解：会计算 Heaviside 函数等广义函数的广义导数、掌握 Laplace 算子的基本解的推导；

应用：用 Green 函数求解 Dirichlet 问题

（三）调和函数的性质（一般）

识记：调和函数的基本性质：解析性、充要条件、Harnack 不等式、Liouville 定理、可去奇点定理

理解：调和函数的解析性、充要条件、Harnack 不等式的证明及意义

应用：调和函数的基本性质在具体问题中的应用

第五章　抛物型方程

一、学习目的与要求

通过本章的学习，考生应掌握广义函数的 Fourier 变换的概念和计算，学会用 Fourier 变换推导热传导方程的基本解，重点掌握初边值问题的极值原理和 Cauchy 问题的先验估计。

二、考核知识点与考核目标

（一）初边值问题的极值原理、Cauchy 问题的先验估计（重点）

识记：初边值问题的极值原理的内容

理解：初边值问题的极值原理和比较原理的证明、Cauchy 问题的先验估计

应用：用初边值问题的极值原理和先验估计证明唯一性及稳定性

（二）广义函数的 Fourier 变换、Cauchy 问题（次重点）

识记：广义函数的 Fourier 变换、急降函数空间、缓增广义函数空间的概念；会计算 δ 函数等广义函数的 Fourier 变换

理解：Fourier 变换的性质、Fourier 变换求解热传导方程的基本解

应用：热传导方程基本解在 Cauchy 问题中的应用

第六章　双曲型方程

一、学习目的与要求

通过本章的学习，考生应掌握波动方程的基本解、特征方程和特征方向的概念，重点掌握波动方程的能量积分方法以及对唯一性和稳定性的证明，了解降维法和 Huygens 现象。

二、考核知识点与考核目标

（一）能量积分及唯一性与稳定性（重点）

识记：能量积分的概念

理解：用能量积分方法证明波动方程初边值问题唯一性和稳定性，Gronwall 不等式的内容及证明

应用：复杂问题的能量构造及能量不等式的证明

（二）基本解与 Cauchy 问题、特征概念（次重点）

识记：波动方程基本解、特征方程和特征方向的概念

理解：偏微分方程特征方程和特征方向的求解

应用：波动方程基本解在 Cauchy 问题中的应用

（三）降维法、Huygens 现象（一般）

识记：Huygens 现象、波的弥散的概念

理解：了解降维法求解波动方程的 Cauchy 问题

应用：降维法处理实际的计算问题

第七章　变分方法及广义解

一、学习目的与要求

通过本章的学习，考生应理解范数、Hilbert 空间、Sobolev 空间的概念，理解 Riesz 表示定理和 Lax-Milgram 定理，了解偏微分方程的近似解法，重点掌握广义解及其等价变分问题，理解广义解的适定性的证明。

二、考核知识点与考核目标

（一）广义解及其适定性（重点）

识记：广义解的概念

理解：三类边值（Dirichlet 边值、Newmann 边值、Robin 边值）问题的广义解及其等价变分问题

应用：广义解的适定性证明

（二）Hilbert 空间及 Sobolev 空间（次重点）

识记：范数、Hilbert 空间、Sobolev 空间的概念

理解：Riesz 表示定理和 Lax-Milgram 定理的条件及结论

应用：Hilbert 空间和范数的相关证明

（三）近似解法（一般）

识记：Ritz 方法和 Galerkin 方法

理解：学会推导具体的简单的初边值问题的 Ritz 方法和 Galerkin 方法
应用：Ritz 方法和 Galerkin 方法在实际计算问题中应用

第三部分　有关说明与实施要求

一、考核的能力层次表述

本大纲在考核目标中，按照“识记”、“理解”、“应用”三个能力层次规定其应达到的能力层次要求。各能力层次为递进等级关系，后者必须建立在前者的基础上，其含义是：

识记：能知道有关的名词、概念、知识的含义，并能正确认识和表述，是低层次的要求。

理解：在识记的基础上，能全面把握基本概念、基本原理、基本方法，能掌握有关概念、原理、方法的区别与联系，是较高层次的要求。

应用：在理解的基础上，能运用基本概念、基本原理、基本方法联系学过的多个知识点分析和解决有关的理论问题和实际问题，是最高层次的要求。

二、教材

指定教材：数学物理方程，吴方同，武汉大学出版社，2011 年第一版

三、自学方法指导

1．在开始阅读指定教材某一章之前，先翻阅大纲中有关这一章的考核知识点及对知识点的能力层次要求和考核目标，以便在阅读教材时做到心中有数，有的放矢。
2．阅读教材时，要逐段细读，逐句推敲，集中精力，吃透每一个知识点，对基本概念必须深刻理解，对基本理论必须彻底弄清，对基本方法必须牢固掌握。
3．在自学过程中，既要思考问题，也要做好阅读笔记，把教材中的基本概念、原理、方法等加以整理，这可从中加深对问题的认知、理解和记忆，以利于突出重点，并涵盖整个内容，可以不断提高自学能力。
4．完成书后作业和适当的辅导练习是理解、消化和巩固所学知识，培养分析问题、解决问题及提高能力的重要环节，在做练习之前，应认真阅读教材，按考核目标所要求的不同层次，掌握教材内容，在练习过程中对所学知识进行合理的回顾与发挥，注重理论联系实际和具体问题具体分析，解题时应注意培养逻辑性，针对问题围绕相关知识点进行层次（步骤）分明的论述或推导，明确各层次（步骤）间的逻辑关系。

四、对社会助学的要求

1．应熟知考试大纲对课程提出的总要求和各章的知识点。
2．应掌握各知识点要求达到的能力层次，并深刻理解对各知识点的考核目标。
3．辅导时，应以考试大纲为依据，指定的教材为基础，不要随意增删内容，以免与大纲脱节。

4．辅导时，应对学习方法进行指导，宜提倡“认真阅读教材，刻苦钻研教材，主动争取帮助，依靠自己学通”的方法。

5．辅导时，要注意突出重点，对考生提出的问题，不要有问即答，要积极启发引导。

6．注意对考生能力的培养，特别是自学能力的培养，要引导考生逐步学会独立学习，在自学过程中善于提出问题，分析问题，做出判断，解决问题。

7．要使考生了解试题的难易与能力层次高低两者不完全是一回事，在各个能力层次中会存在着不同难度的试题。

8．助学学时：本课程共 5 学分，建议总课时 90 学时，其中助学课时分配如下：

章　次	内　容	学　时
1	数学物理方程的导出	8
2	一些经典解法	16
3	偏微分方程的一般理论	12
4	椭圆型方程	18
5	抛物型方程	12
6	双曲型方程	12
7	变分方法及广义解	12
合　　计		90

五、关于命题考试的若干规定

1．本大纲各章所提到的内容和考核目标都是考试内容。试题覆盖到章，适当突出重点。

2．试卷中对不同能力层次的试题比例大致是：“识记”为 15%、“理解”为 70%、“应用”为 15%。

3．试题难易程度应合理：易、较易、较难、难比例为 2：3：3：2。

4．每份试卷中，各类考核点所占比例约为：重点占 60%，次重点占 30%，一般占 10%。

5．试题类型一般分为：单项选择题、填空题、计算题和证明题。

6．考试采用闭卷笔试，考试时间 150 分钟，采用百分制评分，60 分合格。

六、题型示例（样题）

一、单项选择题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题卡”上的相应字母涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1．偏微分方程 $u_x - u_{yy} + 4u_{xy} = f(x,y)$ 的阶数为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1．偏微分方程定解问题的适定性是指解的存在性、______和稳定性。

三、计算题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1．试用分离变量法求解$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = A, \quad 0 < x < l \end{cases}$，其中 A 为常数。

四、证明题（本大题共■小题，每小题■分，共■分）

1．试用能量积分法证明波动方程$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x)$当两端固定的初边值问题解的唯一性和稳定性。