

湖南省高等教育自学考试

课程考试大纲

微 分 几 何

(课程代码: 02014)

湖南省教育考试院组编
2016 年 12 月

高等教育自学考试课程考试大纲

课程名称：微分几何

课程代码：02014

第一部分 课程性质与目标

一、课程性质与特点

微分几何是高等教育自学考试数学（本科）专业的选考课程。微分几何是运用微积分的理论研究空间的几何性质的数学分支学科，是研究曲线、曲面上的微积分理论，展示曲线曲面上的几何不变量和几何研究方法，也是多元微积分理论的深化。

二、课程目标与基本要求

通过本课程的学习使考生理解和掌握微分几何的基本理论和研究方法，通过曲线论、曲面论和曲面的内蕴性质的学习，使考生加深对空间几何性质的理解，并以此进一步培养和提高考生的逻辑推理、分析论证、演绎归纳等抽象思维能力。

三、与本专业其他课程的关系

微分几何作为与空间解析几何、拓扑学并列的本科数学专业的三大几何学课程之一，是空间解析几何、数学分析的后续课程。

第二部分 考核内容与考核目标

第一章 欧氏空间

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生熟悉向量空间的一些基本概念，了解向量是实现欧氏空间的几何结构代数化的基本工具，掌握向量函数的几个基本运算性质。

二、考核知识点与考核目标

（一）欧氏空间（次重点）

识记：正交框架的概念，点的坐标和坐标变换的概念

理解：合同变换的概念

应用：合同变换的正交矩阵表示

（二）向量空间（一般）

识记：向量空间内积、外积、混合积的概念，向量函数的微商的概念

理解：向量内积、外积、混合积的坐标计算公式，二重外积公式

应用：向量函数内积、外积和混合积的微商公式

第二章 曲线的局部理论

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生了解曲线的曲率和挠率在刻画曲线几何特征的作用，会计算曲线的弧长、曲率和挠率，熟练运用 Frenet 公式，熟悉曲线论的基本定理，了解曲线在一点的标准展开。

二、考核知识点与考核目标

（一）曲线论基本定理（次重点）

理解：曲线论基本定理，弧长、曲率和挠率三个量是曲线形状的完全不变量系统

应用：由曲率确定平面曲线方程

（二）Frenet 标架和 Frenet 公式（重点）

识记：正则曲线的概念，曲线的弧长公式，弧长参数的概念，曲率和挠率的概念

理解：曲率和挠率的求法，Frenet 标架及其相关概念，Frenet 标架的求法

应用：Frenet 公式，曲线在一点的近似曲线

第三章 曲面的局部理论

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生了解正则曲面及其切平面、法线的概念，会计算曲面的第一基本形式，了解曲面的第二基本形式的概念，会计算曲面的第二基本形式，掌握法曲率、主曲率、主方向、Gauss 曲率、平均曲率的概念与计算，了解 Gauss 映射和 Weingarten 变换。

二、考核知识点与考核目标

（一）曲面的第一、第二基本形式（重点）

识记：曲面的第一基本形式的概念，曲面的第二基本形式的概念，法曲率的概念

理解：曲面第一基本形式的求法，曲面的第二基本形式的求法，法曲率的求法

应用：应用曲面的第一、第二基本形式求法曲率、主曲率和 Gauss 曲率等

（二）主曲率与 Gauss 曲率（次重点）

识记：主曲率、主方向、Gauss 曲率、平均曲率的概念

理解：Gauss 曲率、平均曲率、主曲率的求法，法曲率与主曲率的关系，Gauss 曲率和平均曲率与主曲率的关系，曲面在一点的 Dupin 标形的判定

应用：Gauss 曲率、平均曲率、主曲率的应用，曲面在一点的近似曲面

（三）曲面的概念（一般）

识记：曲面的概念，几个常见曲面的参数方程

理解：曲面的切平面与法线的求法；曲面的切平面和法线与参数选取的无关性

第四章 标架与曲面论基本定理

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生了解自然标架场的概念、掌握自然标架的运动方程、曲面的结构方程，熟悉曲面的存在唯一性定理，熟悉正交活动标架下曲面的相关结论。

二、考核知识点与考核目标

（一）曲面的结构方程与曲面的存在唯一性定理（次重点）

理解：曲面的唯一性定理，曲面的存在性定理，曲面的结构方程

应用：由第一基本形式和第二基本形式确定曲面方程

（二）正交活动标架（重点）

识记：曲面的自然标架的概念

理解：正交标架的求法，曲面的 Christoffel 符号的求法，正交活动标架下的第一、二基本形式，曲面正交标架的运动方程

（三）自然标架的运动方程（一般）

理解：自然标架的运动方程

第五章 曲面的内蕴几何学

一、学习目的与要求

通过本章学习，要求考生了解测地曲率和测地挠率的概念，理解测地线的概念，熟练掌握测地曲率和测地线的求法，掌握测地坐标系的概念及其应用，熟悉常曲率曲面的特征，了解 Gauss-Bonnet 公式。

二、考核知识点与考核目标

（一）测地曲率和测地线（重点）

识记：测地曲率的概念，测地线的概念

理解：测地曲率的求法，Liouville 公式，测地线方程

应用：测地曲率的应用

（二）等距变换和测地坐标系（次重点）

识记：等距变换的概念，协变微分的概念

理解：等距变换的性质，Gauss 定理，测地平行坐标系的概念，测地极坐标系的概念

（三）常曲率曲面和 Gauss-Bonnet 公式（一般）

理解：常曲率曲面在测地坐标系下的第一基本形式，Gauss-Bonnet 公式

说明：教材第二部分——整体微分几何选讲部分不作考核要求。

第三部分 有关说明与实施要求

一、考核的能力层次表述

本大纲在考核目标中,按照“识记”、“理解”、“应用”三个能力层次规定其应达到的能力层次要求。各能力层次为递进等级关系,后者必须建立在前者的基础上,其含义是:

识记:能知道有关的名词、概念、知识的含义,并能正确认识和表述,是低层次的要求。

理解:在识记的基础上,能全面把握基本概念、基本原理、基本方法,能掌握有关概念、原理、方法的区别与联系,是较高层次的要求。

应用:在理解的基础上,能运用基本概念、基本原理、基本方法联系学过的多个知识点分析和解决有关的理论问题和实际问题,是最高层次的要求。

二、教材

指定教材:微分几何,彭家贵、陈卿,高等教育出版社,2002年第1版

三、自学方法指导

1. 在开始阅读指定教材某一章之前,先翻阅大纲中有关这一章的考核知识点及对知识点的能力层次要求和考核目标,以便在阅读教材时做到心中有数,有的放矢。
2. 阅读教材时,要逐段细读,逐句推敲,集中精力,吃透每一个知识点,对基本概念必须深刻理解,对基本理论必须彻底弄清,对基本方法必须牢固掌握。
3. 在自学过程中,既要思考问题,也要做好阅读笔记,把教材中的基本概念、原理、方法等加以整理,这可从中加深对问题的认知、理解和记忆,以利于突出重点,并涵盖整个内容,可以不断提高自学能力。
4. 完成书后作业和适当的辅导练习是理解、消化和巩固所学知识,培养分析问题、解决问题及提高能力的重要环节,在做练习之前,应认真阅读教材,按考核目标所要求的不同层次,掌握教材内容,在练习过程中对所学知识进行合理的回顾与发挥,注重理论联系实际和具体问题具体分析,解题时应注意培养逻辑性,针对问题围绕相关知识点进行层次(步骤)分明的论述或推导,明确各层次(步骤)间的逻辑关系。

四、对社会助学的要求

1. 应熟知考试大纲对课程提出的总要求和各章的知识点。
2. 应掌握各知识点要求达到的能力层次,并深刻理解对各知识点的考核目标。
3. 辅导时,应以考试大纲为依据,指定的教材为基础,不要随意增删内容,以免与大纲脱节。
4. 辅导时,应对学习方法进行指导,宜提倡“认真阅读教材,刻苦钻研教材,主动争取帮助,依靠自己学通”的方法。
5. 辅导时,要注意突出重点,对考生提出的问题,不要有问即答,要积极启发引导。

6. 注意对考生能力的培养，特别是自学能力的培养，要引导考生逐步学会独立学习，在自学过程中善于提出问题，分析问题，做出判断，解决问题。
7. 要使考生了解试题的难易与能力层次高低两者不完全是一回事，在各个能力层次中会存在着不同难度的试题。
8. 助学学时：本课程共 4 学分，建议总课时 72 学时，其中助学课时分配如下：

章 次	内 容	学 时
第一章	欧氏空间	4
第二章	曲线论	12
第三章	曲面论	18
第四章	曲面论基本定理	20
第五章	曲面的内蕴微分几何	18
合 计		72

五、关于命题考试的若干规定

1. 本大纲各章所提到的内容和考核目标都是考试内容。试题覆盖到章，适当突出重点。
2. 试卷中对不同能力层次的试题比例大致是：“识记”为 30%、“理解”为 50%、“应用”为 20%。
3. 试题难易程度应合理：易、较易、较难、难比例为 2：3：3：2。
4. 每份试卷中，各类考核点所占比例约为：重点占 60%，次重点占 30%，一般占 10%。
5. 试题类型一般分为：单项选择题、填空题、计算题、证明题。
6. 考试采用闭卷笔试，考试时间 150 分钟，采用百分制评分，60 分合格。

六、题型示例（样题）

一、单项选择题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题卡”上的相应字母涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ ($-\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$) 是

A. 球面 B. 圆柱面 C. 螺旋面 D. 抛物面

二、填空题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

1. 曲线 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4t)$ 的挠率为_____。

三、计算题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

1. 求曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, av)$ ($-\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$) 的法曲率和主曲率。

四、证明题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

1. 曲面的第一基本形式为 $I = (1 + u^2)du^2 + e^{2v}dv^2$ ，求证：它的 u 线是测地线。