

湖南省高等教育自学考试  
课程考试大纲

初等数论  
(课程代码: 02013)

湖南省教育考试院组编  
2016年12月

# 高等教育自学考试课程考试大纲

课程名称：初等数论

课程代码：02013

## 第一部分 课程性质与目标

### 一、课程性质与特点

初等数论是高等教育自学考试数学（本科）专业的专业核心课程。本课程主要研究整数最基本的性质，是整数性质的一个最古老的分支之一，包括整除理论，其中心内容是算术基本定理和最大公约数与最小公倍数理论，还有同余理论是初等数论的核心，以及建立在整除理论和同余理论基础上的不定方程的基本解法，以及二次同余式和连分数理论。初等数论是师范院校本科教学阶段一门十分重要的数学基础课，与中小学的数学课程联系十分密切。

### 二、课程目标与基本要求

通过本课程的学习，掌握整数的整除性质，不定方程的特解通解的求法、商高不定方程的基本解公式，同余的性质、同余式和同余式组的解法、简单二次同余式的解数与解法的判定，连分数的概念及有关性质等基本知识，培养考生逻辑思维能力和计算推理能力；熟练掌握相关的数论基本公式及其应用，培养考生灵活运用初等数论的基本知识及其思想方法解决实际问题的能力，为今后学习、研究现代数学和从事数学教育工作奠定基础。

### 三、与本专业其他课程的关系

本课程以中学数学，初等代数为基础，后续课程为高等代数，数学分析等。

## 第二部分 考核内容与考核目标

### 第一章 整数的可除性

#### 一、学习目的与要求

通过本章的学习，应识记并理解整除、最大公约数与最小公倍数、互质、两两互质、质数的概念和性质、理解算术基本定理的意义和作用。掌握并能用辗转相除法求两个数的最大公约数，理解并掌握高斯函数的概念和性质。整除理论是初等数论的基础内容，是后续学习的基石，必须熟练掌握灵活运用。

#### 二、考核知识点与考核目标

- (一) 整除的概念与性质、带余除法及其应用、最大公约数与最小公倍数的性质和求法、辗转相除法、质数与合数的性质与判定、算术基本定理、大于 1 的正整数的标准分解式、高斯函数  $[x]$  及小数部分函数  $\{x\}$  的概念与应用、 $n!$  的标准分解式（重点）

识记：整除的概念及特殊整数的整除特征，两个正整数和三个正整数的最

大公约数与最小公倍数关系的公式，由标准分解式得到的三个公式，即正整数 $a$ 的所有正约数的个数 $\tau(a)$ 、所有正约数的和 $\sigma(a)$ 、所有正约数的积 $\sigma_1(a)$ 及其性质，高斯函数 $[x]$ 以及小数部分函数 $\{x\}$ 的概念和性质

理解：最大公约数与最小公倍数的性质，质数与合数的特征及其判断，算术基本定理及大于1的整数的标准分解式，算术基本定理的其它形式

应用：利用整除特征求未知整数，用高斯函数得到的公式解决实际问题，用辗转相减法求多个数的最大公约数，用分解质因数法求多个数的最大公约数与最小公倍数，会证明质数与合数、最大公约数与最小公倍数的等式

## (二) 整除的进一步性质、平凡约数、非平凡约数、公因数与公倍数、成分指数(次重点)

识记：整除的进一步性质，平凡约数与非平凡约数，互质与两两互质的概念，成分指数的概念

理解：最大公约数与公约数的关系，最小公倍数与公倍数的关系，成分指数与标准分解式之间的关系

应用：会利用成分指数性质证明与最大公约数与最小公倍数有关的等式

## (三) 不整除、质因数、完全数，梅森数，费马数的概念和性质(一般)

识记：不整除和质因数的概念，完全数的概念，费马数、梅森数的表达式

理解：完全数，梅森数，费马数的有关性质

应用：不整除时会求余数，大致了解梅森数、费马数的性质和简单应用

## 第二章 不定方程

### 一、学习目的与要求

通过本章的学习，应识记并理解不定方程的基本概念，熟练掌握二元一次不定方程的解法和商高不定方程解的结构，掌握二元一次不定方程有整数解的充要条件及其解法，以及特殊高次不定方程的常用解法、商高不定方程的解的结构。还应掌握二元一次不定方程与多元一次不定方程解的关系，会解三元一次不定方程和简单的高次不定方程，会应用不定方程解某些实际问题。

### 考核知识点与考核目标

(一) 不定方程、整数解、特解、通解、正整数解、二元一次不定方程有解的充要条件以及通解的一般形式、辗转相除法或逐步回代法求特解、商高不定方程的基本解公式(重点)

识记：不定方程、整数解、特解、通解、正整数解、二元一次不定方程有解的充要条件以及通解的一般形式，商高不定方程的基本解公式

理解：二元一次不定方程的特解和通解，正整数解，商高不定方程的基本解公式

应用：辗转相除法、余数分析法、系数逐步缩小的方法求特解、二元一次

### 不定方程的正整数解和勾股数的求法

- (二) 三元一次不定方程有解的条件、三元一次不定方程的解法、观察法，高次不定方程的常用解法，如分解因式法、余数分析法、约数分析法等（次重点）  
识记：三元一次不定方程无解、任意解、三元一次不定方程有解的条件和解法、三元一次不定方程的整数解的一般形式，高次不定方程的常用解法  
理解：三元一次不定方程的所有整数解的表示，用分解因式法、余数分析法、约数分析法等来解特殊高次不定方程  
应用：分解因式法、余数分析法、约数分析法等来解高次不定方程、“物不知其数”，“百钱买百鸡”之类的问题，用多元一次不定方程求解
- (三)  $n$  元一次不定方程有解的条件、 $n$  元一次不定方程的解法和解的一般形式、费马问题的介绍（一般）  
识记： $n$  元一次不定方程有解的条件、 $n$  元一次不定方程的解法和解的一般形式、费马大定理  
理解： $n$  元一次不定方程有解的条件、 $n$  元一次不定方程的解法和解的一般形式、费马大定理的证明思路  
应用： $n$  元一次不定方程有解的条件、 $n$  元一次不定方程的解法和解的一般形式、利用费马大定理的结论，大致了解如何证明费马问题模式的不定方程无解

## 第三章 同余

### 一、学习目的与要求

通过本章的学习，应识记并理解同余、同余式的基本概念及其基本性质；熟练掌握剩余类、完全剩余系、简化剩余系和 Euler 函数的概念及其性质，熟练掌握 Euler 定理、Fermat 小定理，并运用这些定理证明同余问题。同余理论是初等数论的核心，要掌握数论所特有的理论概念与方法。

### 二、考核知识点与考核目标

- (一) 同余的概念及基本性质、同余性质的应用、剩余类、完全剩余系与简化剩余系的概念和性质、构成模  $m$  的完全剩余系与简化剩余系的充要条件，Euler 函数的计算公式，Euler 定理，Fermat 小定理（重点）  
识记：同余式、完全剩余系与简化剩余系的概念和相关性质定理，非负最小完全剩余系与绝对最小完全剩余系，非负最小简化剩余系与绝对最小简化剩余系，欧拉函数的计算公式，Euler 定理和 Fermat 小定理  
理解：同余式的性质，完全剩余系与简化剩余系的充要条件，Euler 定理，Fermat 小定理的证明  
应用：同余式性质的应用，完全剩余系与简化剩余系性质的应用，灵活运用 Euler 定理，Fermat 小定理进行求余数的计算和同余式的证明
- (二) 同余的等价形式，不是模  $m$  的完全剩余系与简化剩余系的判定，循环小数

(次重点)

识记：同余的表示符号，同余的等价形式，不是模  $m$  的完全剩余系与简化剩余系的判定，既约分数与小数的互化，既约分数化为有限小数、无限纯循环小数、无限环循环小数的充要条件

理解：同余的等价形式，模  $m$  的完全剩余系与简化剩余系的判定，通过既约分数的分母的标准分解式所含质因数的特征判断能化成哪类小数

应用：不是模  $m$  的完全剩余系与简化剩余系的判定，完全剩余系和简化剩余系的应用，通过既约分数的分母的标准分解式所含质因数的特征判断能化成什么样的小数，掌握如何把无限纯循环小数和无限混循环小数化为既约分数

(三) 同余的读法，判断一个数能否被 3. 7. 11. 13 等整除、绝对最小完全剩余系与绝对最小简化剩余系（一般）

识记：同余的读法，判断一个数能否被 3. 7. 11. 13 等整除、绝对最小完全剩余系与绝对最小简化剩余系

理解：判断一个数能否被 3. 7. 11. 13 等整除的方法、绝对最小完全剩余系与绝对最小简化剩余系

应用：判断一个数能否被 3. 7. 11. 13 等整除的应用、绝对最小完全剩余系与绝对最小简化剩余系的应用

## 第四章 同余式

### 一、学习目的与要求

通过本章的学习，应该熟练掌握一次同余式的解法，掌握孙子定理，会应用孙子定理求解简单的同余式组，掌握高次同余式、质数模的同余式解的定理及其联系，同余式的次数与解数之间的关系，会解一些简单的高次同余式。

### 二、考核知识点与考核目标

(一) 同余式及一次同余式的概念，一次同余式的一般形式，一次同余式有解的充要条件，一次同余式的解数和解法，一次同余式组的概念和一般形式，一次同余式组有解的充要条件，孙子定理及其应用，掌握模不是两两互质的一次同余式组化为模两两互质的同余式组的方法，然后用孙子定理求其解，高次同余式的概念和解法，质数模的同余式的相关定理，质数模的同余式定理的应用（重点）

识记：同余式及一次同余式的概念，一次同余式的一般形式，一次同余式有解的充要条件，一次同余式的解数和解法，一次同余式组的概念和一般形式，一次同余式组有解的充要条件，孙子定理及其应用，高次同余式的概念和解法，质数模的同余式的相关定理，质数模的同余式定理的应用一次同余式有解的充要条件，一次同余式的四种解法，孙子定理

理解：一次同余式有解的充要条件，一次同余式组有解的充要条件，高次

同余式的概念和解法，质数模的同余式的相关定理，质数模的同余式定理的应用，同余式组的解法，应用孙子定理的条件

应用：利用同余的性质解同余式，一次同余式的四种解法，孙子定理及其应用，掌握模不是两两互质的一次同余式组化为模两两互质的同余式组的方法，然后用孙子定理求其解，高次同余式的概念和解法，质数模的同余式的相关定理，质数模的同余式定理的应用

(二) 模  $m$  的一次同余式有解的充要条件与解数的判定、孙子定理的条件，高次同余式的解数及解法（次重点）

识记：模  $m$  的一次同余式有解的充要条件与解数的判定、孙子定理的条件，高次同余式的解数及解法同余式的概念、解数的判定

理解：模  $m$  的一次同余式的解数的判定、孙子定理的条件，高次同余式的解数及解法高次同余式的解法

应用：应用孙子定理的求模是两两互质的一次同余式组的所有解，高次同余式的解数及解法，会求高次同余式得所有解

(三) 质数模的同余式（一般）

识记：质数模的同余式的解数，Wilson 定理

理解：大致了解质数模同余式的次数与解数的关系

应用：质数模同余式性质的应用

## 第五章 二次同余式与平方剩余

### 一、学习目的与要求

通过本章的学习，应理解一般二次同余式的化简过程，识记并理解平方剩余、平方非剩余的概念，熟练掌握奇质数的平方剩余与平方非剩余的 Euler 判别条件，会求质数模的平方剩余与平方非剩余，正确理解 Legendre 符号的概念及其性质，会用二次反转定律求质数模的平方剩余和平方非剩余。

### 二、考核知识点与考核目标

(一) 一般二次同余式（重点）

识记：平方剩余与平方非剩余的概念

理解：理解平方剩余与平方非剩余与二次同余式的关系

应用：判断一般二次同余式是否有解

(二) 单质数的平方剩余与非平方剩余（次重点）

识记：Euler 判别条件

理解：理解质数模的平方剩余与平方非剩余的个数

应用：会求一个质数的平方剩余与平方非剩余

(三) Legendre 符号（一般）

识记：Legendre 符号、二次反转定律

理解：Legendre 符号的值规定

应用：利用二次反转定律和 Legendre 符号判断二次同余式  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  是否有解

## 第七章 连分数

### 一、学习目的与要求

通过本章的学习，了解连分数是一种特殊的繁分数，掌握并理解一个有限连分数表示一个有理数，一个无限连分数表示一个无理数，并掌握实数与连分数的互化。

### 二、考核知识点与考核目标

#### (一) 连分数的基本性质，把实数表示为连分数（重点）

识记：有限简单连分数与无限简单连分数的概念

理解：有限简单连分数与有理数、无限简单连分数与无理数的关系

应用：熟练掌握任意实数与连分数互化

#### (二) 循环连分数（次重点）

识记：循环连分数的概念

理解：每一循环连分数一定是某一个整系数二次不可约方程的实根

应用：循环连分数与整系数不可约二次方程的简单应用

#### (三) 简单连分数（一般）

识记：简单连分数的概念

理解：简单连分数与实数之间的关系

应用：简单连分数与实数的互化

其中教材第六章、第八章、第九章供有兴趣的考生自学，不作考核要求。

## 第三部分 有关说明与实施要求

### 一、考核的能力层次表述

本大纲在考核目标中，按照“识记”、“理解”、“应用”三个能力层次规定其应达到的能力层次要求。各能力层次为递进等级关系，后者必须建立在前者的基础上，其含义是：

识记：能知道有关的名词、概念、知识的含义，并能正确认识和表述，是低层次的要求。

理解：在识记的基础上，能全面把握基本概念、基本原理、基本方法，能掌握有关概念、原理、方法的区别与联系，是较高层次的要求。

应用：在理解的基础上，能运用基本概念、基本原理、基本方法联系学过的多个知识点分析和解决有关的理论问题和实际问题，是最高层次的要求。

### 二、教材

#### 1. 指定教材：

初等数论，闵嗣鹤、严士健，高等教育出版社，2003年第三版

#### 2. 参考教材：

初等数论，单增，南京大学出版，2000年版

初等数论，王进明，人民教育出版社，2013年第10版

### 三、自学方法指导

1. 在开始阅读指定教材某一章之前，先翻阅大纲中有关这一章的考核知识点及对知识点的能力层次要求和考核目标，以便在阅读教材时做到心中有数，有的放矢。
2. 阅读教材时，要逐段细读，逐句推敲，集中精力，吃透每一个知识点，对基本概念必须深刻理解，对基本理论必须彻底弄清，对基本方法必须牢固掌握。
3. 在自学过程中，既要思考问题，也要做好阅读笔记，把教材中的基本概念、原理、方法等加以整理，这可从中加深对问题的认知、理解和记忆，以利于突出重点，并涵盖整个内容，可以不断提高自学能力。
4. 完成书后作业和适当的辅导练习是理解、消化和巩固所学知识，培养分析问题、解决问题及提高能力的重要环节，在做练习之前，应认真阅读教材，按考核目标所要求的不同层次，掌握教材内容，在练习过程中对所学知识进行合理的回顾与发挥，注重理论联系实际和具体问题具体分析，解题时应注意培养逻辑性，针对问题围绕相关知识点进行层次（步骤）分明的论述或推导，明确各层次（步骤）间的逻辑关系。

### 四、对社会助学的要求

1. 应熟知考试大纲对课程提出的总要求和各章的知识点。
2. 应掌握各知识点要求达到的能力层次，并深刻理解对各知识点的考核目标。
3. 辅导时，应以考试大纲为依据，指定的教材为基础，不要随意增删内容，以免与大纲脱节。
4. 辅导时，应对学习方法进行指导，宜提倡“认真阅读教材，刻苦钻研教材，主动争取帮助，依靠自己学通”的方法。
5. 辅导时，要注意突出重点，对考生提出的问题，不要有问即答，要积极启发引导。
6. 注意对考生能力的培养，特别是自学能力的培养，要引导考生逐步学会独立学习，在自学过程中善于提出问题，分析问题，做出判断，解决问题。
7. 要使考生了解试题的难易与能力层次高低两者不完全是一回事，在各个能力层次中会存在着不同难度的试题。
8. 助学学时：本课程共5学分，建议总课时90学时，其中助学课时分配如下：

章次	内容	学时
第一章	整数的可除性	20
第二章	不定方程	16
第三章	同余	14
第四章	同余式	18
第五章	二次同余式与平方剩余	12

第七章	连分数	10
合 计		90

## 五、关于命题考试的若干规定

1. 本大纲各章所提到的内容和考核目标都是考试内容。试题覆盖到章，适当突出重点。
2. 试卷中对不同能力层次的试题比例大致是：“识记”为 20%、“理解”为 30%、“应用”为 50%。
3. 试题难易程度应合理：易、较易、较难、难比例为 2：3：3：2。
4. 每份试卷中，各类考核点所占比例约为：重点占 60%，次重点占 30%，一般占 10%。
5. 试题类型一般分为：单项选择题、填空题、计算题、解答题、证明题。
6. 考试采用闭卷笔试，考试时间 150 分钟，采用百分制评分，60 分合格。

## 六、题型示例

### 一、单项选择题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题卡”上的相应字母涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 若  $6 \mid n$  且  $5 \mid n$ ，则正整数  $n$  的最小值是

A. 6                      B. 10                      C. 15                      D. 30

### 二、填空题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

1. 写出模 7 的一个非负最小完全剩余系，并要求每项都是 3 的倍数\_\_\_\_\_。

### 三、计算题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

$$1. \text{解同余方程} \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \\ x \equiv 3 \pmod{25} \end{cases}$$

### 四、解答题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

1. 一百马，一百瓦，大马驮五，中马驮三，两小马驮一片瓦，最后不剩马和瓦，问大马，中马，小马各几何？

### 五、证明题（本大题共 ■ 小题，每小题 ■ 分，共 ■ 分）

1. 设  $a, b, m, n$  为正整数，且  $(m, n) = 1$ ，证明： $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$ 。