

第一章 函数

一、单项选择题

1.

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$ ，函数 $g(x)=f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域是 () .

A. $[1, 3]$

B. $[-1, 5]$

C. $[-1, 3]$

D. $[1, 5]$

【正确答案】 A

【答案解析】 x 是函数 $g(x)$ 中的定义域中的点，当且仅当 x 满足 $0 \leq x+1 \leq 4$ 且 $0 \leq x-1 \leq 4$ 即 $-1 \leq x \leq 3$ 且 $1 \leq x \leq 5$ 也即 $1 \leq x \leq 3$ ，由此可知函数 $g(x)$ 的定义域 $D(g)=\{x|1 \leq x \leq 3\}=[1, 3]$.

本题知识点：函数的定义, 函数的定义

2.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$ ，则函数 $f(x^2)$ 的定义域为 () .

A. $[0, 2]$

B. $[0, 16]$

C. $[-16, 16]$

D. $[-2, 2]$

【正确答案】 D

【答案解析】 根据 $f(x)$ 的定义域，可知 $f(x^2)$ 中应该满足：
 $0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

本题知识点：函数的定义, 函数的定义

3.

函数 $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$ 的定义域为 () .

- A. $[-1, 1]$
- B. $[-1, 3]$
- C. $(-1, 1)$
- D. $(-1, 3)$

【正确答案】 B

【答案解析】

根据根号函数的性质，应该满足：

$$1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2,$$

即 $-1 \leq x \leq 3$.

本题知识点：函数的定义, 函数的定义

4.

写出函数 $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \leq -1 \\ \lg(1+x), & x > -1 \end{cases}$ 的定义域及函数值 $f(-\sqrt{3}), f(-1), f(9)$ ().

- A. $(-\infty, -1); -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}; 10$
- B. $(-1, +\infty); -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}; 10$
- C. $(-\infty, +\infty); -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}; 1$
- D. $(-\infty, +\infty); -\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; 1$

【正确答案】 C

【答案解析】

分段函数的定义域为各个分段区间定义域的并集

故 $D = (-\infty, -1] \cup (-1, +\infty)$.

$$f(-\sqrt{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, f(-1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}, f(9) = \lg(1+9) = \lg 10 = 1.$$

本题知识点：分段函数, 分段函数,

5.

设函数 $f(x) = \sin(x + \pi)$, 则对所有的 x , 则 $f(-x) = ()$.

- A. $\sin x$
- B. $-\sin x$

- C. $\cos x$
 D. $-\cos x$

【正确答案】 A

【答案解析】 本题考察三角函数公式。

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x + \pi) = -\sin x, \\
 f(-x) &= -\sin(-x) = \sin x.
 \end{aligned}$$

本题知识点：函数的定义, 函数的定义

6.

设 $f(x-1) = x^3 - 1$, 则 $f(x) = ()$.

- A. $x^3 + 2x^2 + 2x$
 B. $x^3 + 3x^2 + 3x$
 C. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
 D. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

【正确答案】 B

【答案解析】

$$\text{令 } t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1,$$

$$\text{则 } f(t) = (t + 1)^3 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t,$$

$$\text{故 } f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x.$$

本题知识点：函数的定义, 函数的定义,

二、综合题

1.

讨论 $f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ 的奇偶性.

【正确答案】