

《线性代数》2018年4月真题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分

1.

设2阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -1$ ，则 $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_1-a_2 \\ b_1+b_2 & b_1-b_2 \end{vmatrix} =$

- A. -2
- B. -1
- C. 1
- D. 2

2. 设 A 为3阶矩阵，且 $|A|=a \neq 0$ ，将 A 按列分块为 $A=(a_1, a_2, a_3)$ ，若矩阵 $B=(a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1)$ ，则 $|B|=$

- A. 0
- B. a
- C. $2a$
- D. $3a$

3. 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，则下列向量组中线性无关的是

- A. $a_1, 2a_2, 3a_3$
- B. $a_1, 2a_1, a_2 - a_3$
- C. $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_1$
- D. $a_1 + a_2, a_2 - a_3, a_1 + 2a_2 - a_3$

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

4. 设矩阵 B 与 A 相似，则矩阵 $3E-A$ 的秩为

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5. 设矩阵 $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为

- A. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
- B. $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$
- C. $z_1^2 - z_2^2$
- D. $z_1^2 + z_2^2$

二、填空题：本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

1. 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$, 若元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $A_{31} + A_{32} + A_{33} =$ _____.

2. 已知矩阵 $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, -1, 1)$, 且 $C = A^T B$, 则 $C =$ _____.

3. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = -\frac{1}{3}$, 则行列式 $\left| \left(\frac{1}{2} A \right)^{-1} + 3A^* \right| =$ _____.

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2016} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2017} =$$

5.

设向量 $\beta = (1, 0, 0)^T$ 可由向量组 $a_1 = (1, 1, a)^T, a_2 = (1, a, 1)^T, a_3 = (a, 1, 1)^T$ 线性表出, 且表示法唯一, 则 a 的取值应满足_____.

6.

设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -4, 5)^T, \alpha_3 = (2, 0, t)^T$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____.

7. 已知 $\eta_1 = (1, 0, -1)^T, \eta_2 = (3, -1, 5)^T$ 是 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解, 则对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 有一个非零解 $\xi =$ _____.

8.

设 $\lambda = -\frac{2}{3}$ 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $2E - 3A^2$ 必有一个特征值为_____.

9. 设 2 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $-2, 2$, 则 $A^2 =$ _____.

10. 设二次型 $f(x_1, x_2) = tx_1^2 + x_2^2 - 4tx_1x_2$ 正定, 则实数 t 的取值范围是_____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分

1.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

计算 4 阶行列式

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
 其中 $a_i \neq 0 (i=1, 2, 3, 4)$, 求 A^{-1} .

3.