

《线性代数》2017 年 10 月真题

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分

1. 设 A 、 B 是 n 阶可逆矩阵，下列等式中正确的是

- A. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- B. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- C. $(A-B)^{-1} = A^{-1} - B^{-1}$
- D. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. 设 A 为 3 阶矩阵且 $r(A)=1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $r(BA)=$

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

3. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (0, 1, 2), \alpha_3 = (0, 0, 1), \beta = (1, 3, 6)$, 则

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关
- B. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示
- C. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示法惟一
- D. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示法不惟一

4. 设 A 为 4×5 矩阵且 $r(A) = 4$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中所含向量的个数为

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

5. 设阶矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda + 3)^2$, 则 $|A+E| =$

- A. -18

- B. -12
C. 12
D. 18

二、填空题：本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分

1.

行列式 $\begin{vmatrix} 100 & 101 \\ 102 & 103 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

2. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=1$, 则 $|-2A|$ =_____.

3. 设 n 阶矩阵 A 的所有元素都是 1, 则 $r(A)$ =_____.

4. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 1 行与第 2 行交换得到矩阵 B , 则 $|A-B|$ =_____.

5.

设 3 维向量 $\alpha = (3, -1, 2)^T, \beta = (3, 1, 4)^T$, 若向量 γ 满足 $2\alpha + \gamma = 3\beta$, 则 γ =_____.

6.

已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - ax_3 = 2 \end{cases}$ 无解, 则数 a =_____.

7. 设向量 $\alpha = (1, 1, 3), \beta = (1, -1, 1)$, 矩阵 $A = \alpha^T \beta$, 则矩阵 A 的非零特征值为_____.

8. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 且矩阵 B 与 A 相似, 则 $|B^2 + E|$ =_____.

9. 已知向量组 $a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (2, 2, k)$ 正交, 则数 k =_____.

10.

已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 5)$, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 的正惯性指数为_____.

三、计算题：本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. 计算 4 阶行列式 D 的值.

2. 已知矩阵 $A = (2, 1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$, $f(x) = x^2 - 5x + 1$, 求 $A^T B$ 及 $f(A^T B)$

3. 已知矩阵 A, B 满足 $AX=B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 X.

4. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 4)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, -2, -2)^T$, $\alpha_4 = (-1, -5, 11, 8)^T$ 的一个极大线性无关组, 并将向量组中的其余向量用该极大线性无关组线性表出.

5. 设 3 元齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$, 确定 a 为何值时, 方程组有非零解并求其通解.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6. 设矩阵 A , 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.